

В технике применяются гироскопы с угловой скоростью собственного вращения порядка $2000 \dots 5000 \text{ с}^{-1}$ ($20\,000 \dots 50\,000$ об/мин). В современной технике гироскопы нашли очень широкое применение. Гироскопические явления проявляются при всех видах движения тела, когда это тело совершает сложное движение, содержащее в своих частях вращательные движения. Рассмотрим основные гироскопические явления быстро вращающихся гироскопов приближенно, приняв, что гироскопу сообщена вокруг оси симметрии или оси гироскопа Oz собственная угловая скорость ω_1 .

Основные допущения приближенной теории

При применении гироскопов в различных устройствах важно знать движение его оси. Собственное вращение вокруг оси обычно задано, и угловая скорость собственного вращения при этом поддерживается постоянной. Движение оси быстро вращающегося гироскопа можно установить по кинетическому моменту гироскопа, вычисленному относительно неподвижной точки, так как кинетический момент можно считать приближенно направленным по оси гироскопа. Для быстро вращающегося гироскопа угловая скорость прецессии мала по сравнению с угловой скоростью собственного вращения и также мало изменение угла нутации, т. е. угла между осью собственного вращения и осью прецессии.

Мгновенную угловую скорость гироскопа $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$ от вращения вокруг неподвижной точки в первом приближении (рис. 143) можно принять

$$\vec{\omega} \approx \vec{\omega}_1,$$

где $\vec{\omega}_1$ — угловая скорость собственного вращения; $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$ — соответственно угловые скорости прецессии и нутации.

Учитывая, что оси Ox , Oy , Oz — главные оси инерции, а $J_x = J_y$, для проекций кинетического момента на эти оси имеем:

$$K_x = J_x \omega_x; \quad K_y = J_y \omega_y; \quad K_z = J_z \omega_z.$$

Так как $\vec{\omega}$ направлена приближенно по оси собственного вращения Oz , то $\omega_x \approx 0$, $\omega_y \approx 0$ и, следовательно,

$$K_0 = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} \approx K_z = J_z \omega_z \approx J_z \omega_1.$$

Таким образом, для быстро вращающегося гироскопа с большим собственным кинетическим моментом $J_z \omega_1$ можно считать кинетический момент $\vec{K}_0$ равным по модулю собственному кинетическому моменту гироскопа $J_z \omega_1$ и направленным по оси гироскопа, т. е.

$$\vec{K}_0 \approx J_z \vec{\omega}_1. \quad (49)$$

Это приближенное выражение для кинетического момента гироскопа будет точным, если ось гироскопа является его неподвижной осью вращения.

Для решения вопроса о поведении осей таких гироскопов можно пользоваться теоремой Резаля, позволяющей характеризовать движение конца вектора кинетического момента по известному главному моменту внешних сил.

Для сохранения существенных свойств гироскопа угловую скорость прецессии $\vec{\omega}_2$ следует учитывать, пренебрегая только угловой скоростью нутации, но при вычислении кинетического момента гироскопа используем формулу (49).

Особенности движения оси гироскопа

Рассмотрим особенности движения оси гироскопа по сравнению с движением оси такого же тела, не имеющего собственного вращения вокруг оси симметрии Oz . Пусть центр тяжести в обоих случаях расположен в неподвижной точке O и трением в этой точке пренебрежем. Если к покоящемуся телу перпендикулярно оси Oz приложена сила $\vec{F}$ в какой-либо точке A его оси симметрии (рис. 144), то тело начинает вращаться вокруг оси Ox , перпендикулярной плоскости расположения силы и оси симметрии, а точка A тела начнет двигаться в направлении действия силы. Если действие силы прекращается, то тело дальше вращается вокруг оси Ox по инерции с постоянной угловой скоростью, если позволяет крепление тела в точке O .

Совершенно иначе ведет себя быстро вращающийся гироскоп под действием такой же силы $\vec{F}$ (рис. 145), приложенной в точке A . Точка A , согласно приближенной теории, начнет двигаться не в направлении действия силы $\vec{F}$, а, как это следует из теоремы Резаля, в направлении векторного момента этой силы относительно неподвижной точки O — параллельно оси Ox . При этом ось гироскопа вращается вокруг оси Oy . Действительно, гироскоп еще до действия силы имел кинетический момент $\vec{K}_0 = J_z \vec{\omega}_1$, направленный по оси гироскопа, так как гироскоп вращался только вокруг собственной оси Oz с угловой скоростью ω_1 . По теореме Резаля скорость $\vec{u}_B$ конца вектора $\vec{K}_0$ равна и параллельна $\vec{L}_0^{(e)}$ векторной сумме

$$\vec{u}_B = \vec{L}_0^{(e)}.$$

В данном случае

$$\vec{L}_0^{(e)} = \vec{M}_O(\vec{F}),$$

причем момент $\vec{M}_O(\vec{F})$ направлен по оси Ox .

Таким образом, скорость точки B конца вектора $\vec{K}_0$ и при принятых допущениях приближенной теории всех других точек оси гироскопа параллельна $\vec{M}_O(\vec{F})$, что соответствует вращению оси гироскопа Oz или прецессии гироскопа вокруг оси Oy . Ось гироскопа прецессирует под действием силы в направлении момента этой силы. Если момент силы в какой-либо момент времени равен нулю, то прецессия оси гироскопа тоже прекращается. Ось гироскопа не обладает инерцией. Для гироскопа не имеет существенного значения сила $\vec{F}$, так как его прецессионное движение определяется только моментом этой силы относительно неподвижной точки гироскопа. Если центр тяжести гироскопа не находится в неподвижной точке, то надо в общем суммарном моменте сил учесть момент силы тяжести.

Сформулируем следующее правило прецессии: если к вращающемуся вокруг оси гироскопу приложить внешние силы, создающие момент сил относительно его неподвижной точки, то та часть оси гироскопа, по которой направлен кинетический момент, начнет прецессировать в направлении векторного момента этих сил.

Выведем приближенную формулу для оценки угла прецессии ψ в рассмотренном случае действия силы $\vec{F}$. За достаточно малый промежуток времени τ точка B конца вектора $\vec{K}_0$ смещается по дуге годографа на величину

$$s_B \approx u_B \tau = M_O(\vec{F}) \tau = F l \tau = F l t.$$

Угол поворота вокруг оси Oy

$$\psi = \frac{s_B}{OB} = \frac{M_O(\vec{F}) \tau}{K_0} = \frac{F l t}{J_z \omega_1}, \quad (50)$$

так как

$$OB = K_0 = J_z \omega_1.$$

Из (50) следует, что угол ψ тем меньше, чем больше собственный кинетический момент гироскопа $J_z \omega_1$; угол ψ прямо пропорционален моменту импульса силы относительно неподвижной точки гироскопа. Формулу (50) применяют для оценки действия на гироскоп кратковременных сил возмущений, когда величина t очень мала. Если собственный кинетический момент $J_z \omega_1$ достаточно велик по сравнению с моментом импульса силы, то ось гироскопа почти не отклоняется, т. е. на нее не влияют кратковременные импульсы сил или удары. Ось гироскопа устойчива к таким импульсам сил. Удары по оси гироскопа не приводят к заметному ее отклонению от первоначального направления.

Гироскопический момент

Как уже известно, если на гироскоп действуют внешние силы, создающие момент относительно неподвижной его точки, то гироскоп прецессирует с некоторой угловой скоростью. Если момент внешних сил становится равным нулю, то и прецессия гироскопа прекращается. Таким образом, для создания прецессии гироскопа по приближенной теории требуется момент внешних сил, и наоборот.

Пусть гироскоп прецессирует с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$. Вычислим момент внешних сил, вызывающих эту прецессию. По теореме Резаля, момент внешних сил относительно неподвижной точки гироскопа

$$\vec{L}_0^{(e)} = d\vec{K}_0/dt = \vec{u}_B.$$

Так как вектор $\vec{K}_0$, направленный по оси гироскопа, вращается вокруг неподвижной точки с угловой скоростью прецессии $\vec{\omega}_2$, то скорость точки B , совпадающей с концом вектора $\vec{K}_0$, вычисляется по формуле, аналогичной векторной формуле Эйлера для скорости точки тела при сферическом движении, т. е.

$$\vec{u}_B = \vec{\omega}_2 \times \vec{OB} = \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_0,$$

так как $\vec{OB} = \vec{K}_0 = J_z \vec{\omega}_1$.

Для момента внешних сил $\vec{L}_0^{(e)}$ имеем

$$\vec{L}_0^{(e)} = \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_0 = J_z (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1). \quad (51)$$

Если к гироскопу применить одно из следствий принципа Даламбера, что сумма векторных моментов внешних сил вместе с моментом сил инерции точек гироскопа равна нулю, то

$$\vec{L} + \vec{L}_0^{(e)} = 0,$$

где $\vec{L}$ — момент всех сил инерции гироскопа относительно неподвижной его точки. Этот момент $\vec{L}$ называют гироскопическим моментом. Учитывая (51), получаем

$$\vec{L} = -\vec{L}_0^{(e)} = -J_z (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1) = J_z (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2),$$

или окончательно

$$\vec{L} = J_z (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2); \quad L = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta, \quad (52)$$

где θ — угол нутации, т. е. угол между осью собственного вращения и осью прецессии.

Гироскопический момент можно представить как момент гироскопической пары сил, с которой гироскоп действует на тела, принуждающие его прецессировать под действием момента $\vec{L}_0^{(e)}$. Обычно противодействием гироскопа в виде гироскопической пары сил передается на эти тела через подшипники, в которых помещена ось гироскопа. Если эти тела или одно из них могут двигаться, то гироскопическая пара сил может вызвать его движение.

Из (52) видно, что гироскопический момент может быть равен нулю, если угловая скорость прецессии $\vec{\omega}_2$ равна нулю или если ось гироскопа параллельна оси прецессии.

Действие гироскопической пары сил полностью определяется гироскопическим моментом этой пары, вычисляемым по формуле (52). Но во многих случаях более предпочтительно определять это действие по правилу Жуковского, основанному на этой же формуле.

Правило Жуковского: если быстро вращающемуся гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то возникает гироскопическая пара сил, стремящаяся сделать ось гироскопа параллельной оси прецессии, причем так, чтобы после совпадения направления этих осей оба вращения вокруг них имели одинаковое направление.

Если какое-либо тело препятствует гироскопу двигаться так, чтобы сделать его ось параллельной оси прецессии, то гироскоп давит на это тело и закрепленную точку гироскопа.

В том случае, когда таким гироскопом является ротор турбины, установленной на корабле, совершающем разворот вокруг вертикальной оси (рис. 146), гироскопическое давление воспринимается подшипниками турбины. Силу давления N определяют по формуле

$$Nl = L = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta$$

или

$$N = L/l = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta / l, \quad (53)$$

где l — расстояние между подшипниками турбины; ω_2 — угловая скорость поворота корабля (угловая скорость прецессии); θ — угол нутации (в рассматриваемом случае $\theta = 90^\circ$).

Техническое применение гироскопа

Из многочисленных применений прецессирующего гироскопа, движущегося относительно неподвижной точки, рассмотрим для примера измерение угловых скоростей. Пусть гироскоп, ось которого помещена в подшипниках, расположенных на каком-либо летательном аппарате, совершает быстрое вращение вокруг своей оси. Если летательный аппарат поворачивается вокруг какой-либо мгновенной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, то для гироскопа эта угловая скорость является угловой скоростью прецессии и ее можно оценить по силе гироскопического давления N . Эту силу, в свою очередь, можно измерить, например, по деформации пружины, на которой укреплен один из подшипников гироскопа (рис. 147). Для ω_2 по формуле (53) имеем

$$\omega_2 = Nl / (J_z \omega_1 \sin \theta). \quad (54)$$

В практике измерения угловых скоростей обычно используют случай, когда $\theta = 90^\circ$. Если на летательном аппарате осуществить регулирующее устройство, которое бы с помощью Жуковского нуля, стремилось создать для него угловую скорость ω_2 равной нулю, то летательный аппарат можно стабилизировать по угловой скорости относительно соответствующей оси. Создавая с помощью привода соответствующее давление N на произвольную опору, которое эквивалентно угловой скорости прецессии, этим регулирующим устройством с рулями можно управлять летательным аппаратом. Очевидно, для полной стабилизации и управления летательным аппаратом достаточно трех таких гироскопов со взаимно перпендикулярным расположением осей.

Кроме рассмотренной стабилизации с помощью регулирующих устройств, когда гироскоп применяют в качестве чувствительного элемента, его можно применять и для непосредственной стабилизации артиллерийских и иных установок на кораблях, для успокоения качки, стабилизации вагонов железнодорожной железной дороги и т. п.

Другое важное свойство гироскопа, которое наиболее широко применяют, — это способность сохранять направление своей оси, если нет приложенного

Рис. 147

к гироскопу момента внешних сил. Тогда ось гироскопа не прецессирует и сохраняет неизменным свое направление в пространстве. Это свойство уравнивающего гироскопа используют в гироскопах, указателях поворота, стабилизирующих устройствах и т. п. Для этой цели применяют гироскопы с тремя степенями свободы, или свободные гироскопы.

Прецессия тяжелого гироскопа по приближенной теории

Рассмотрим прецессию тяжелого гироскопа (рис. 148) под действием силы тяжести. Согласно правилу прецессии, под действием момента силы тяжести $\vec{P}$ относительно точки O гироскоп прецессирует вокруг вертикальной оси Oz_1 в направлении, указанном на рисунке дуговой стрелкой. Так как в каждый момент времени

$$\vec{L} = -\vec{L}_0^{(e)}; \quad L = L_0^{(e)},$$

то, следовательно,

$$J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta = Pl \sin \theta,$$

где $l = OC$ — расстояние от неподвижной точки до центра тяжести гироскопа.

Угловая скорость прецессии

$$\omega_2 = Pl / (J_z \omega_1). \quad (55)$$

Из (55) следует, что угловая скорость прецессии тяжелого гироскопа не зависит от угла наклона оси гироскопа: она обратно пропорциональна собственному кинетическому моменту гироскопа $J_z \omega_1$, прямо пропорциональна его силе тяжести и расстоянию от центра тяжести гироскопа до неподвижной точки.

Пример. Бегуны вращаются вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω_0 (рис. 149). Сила тяжести каждого бегуна — P ; радиус — R ; радиус инерции относительно оси собственного вращения — ρ .

Определить силу давления бегуна на дно чаши и давление бегунов на шарнир O используя приближенную теорию гироскопа.

Решение. Бегун считаем прецессирующим гироскопом с осью собственного вращения Oz и осью прецессии Oz_1 . Сила давления $\vec{Q}$ бегуна на дно чаши складывается из силы тяжести бегуна и силы гироскопического давления N , т. е. $\vec{Q} = \vec{P} + \vec{N}$.

Предполагая, что средняя точка A бегуна неподвижна, т. е. находится на мгновенной оси бегуна, заключаем, что OA является мгновенной осью бегуна, по которой направлена его угловая скорость, состоящая из скорости прецессии ω_0 , направленной по оси Oz_1 , и собственной угловой скорости бегуна ω_1 , направленной по оси бегуна Oz .

Из подобия треугольников для угловых скоростей и линейных величин получаем

$$\omega_1 / \omega_0 = l / R.$$

Отсюда

$$\omega_1 = \omega_0 l / R.$$

Рассматривая бегуна как прецессирующий гироскоп с угловой скоростью прецессии ω_0 и угловой скоростью собственного вращения ω_1 , по правилу Жуковского получаем, что бегун давит вниз на дно чаши с силой N , а на шарнир O — с такой же по числовому значению силой, но вверх. Так как $\theta = 90^\circ$, то по формуле (53) имеем

$$N = \frac{J_z \omega_1 \omega_0}{l} = \frac{P \rho^2 \omega_0^2 l}{g l R} = \frac{P \rho^2 \omega_0^2}{g R},$$

поскольку

$$J_z = \frac{P}{g} \rho^2.$$

Сила давления

$$Q = P + \frac{P \rho^2 \omega_0^2}{g R} = P \left(1 + \frac{\rho^2 \omega_0^2}{g R} \right).$$

Давление на шарнир O от двух бегунов направлено вверх, и его числовое значение

$$Q_1 = 2N_1 = 2N = 2P \frac{\rho^2 \omega_0^2}{g R}.$$

Если бегун является однородным диском, то $\rho = R/\sqrt{2}$ и

$$Q = P \left(1 + \frac{R \omega_0^2}{2g} \right); \quad Q_1 = P \frac{R \omega_0^2}{g}.$$

Для получения больших давлений на дно чаши применяют бегуны большого радиуса, так как сила гироскопического давления пропорциональна радиусу бегуна.

Рис. 149

516